

数式処理を利用した円錐シェルの解析的解法

矢 島 鎗 司*

Analytic solutions of the conical shell

SOHJI YAJIMA

Synopsis: Analytic solutions of the conical shell are not considered through the development of the finite element method. This presentation shows, that analytic solutions of the conical shell are derived at computer symbolic processing. They are examined, if the solutions filled its differentialequations.

1. ま え が き

有限要素法をはじめとしていわゆる離散化計算法は、電子計算機の高度の技術発達と共に構造物の計算のみならず工学、理学における広範囲な利用を大型電子計算機だけではなく、パーソナルコンピュータでも可能になってきた。この数値計算法は、複雑な形状や荷重状態に対して強力な問題解決手段を与えている。シェルや板構造物は、特に有限要素法にとって、非常に適した応用対象物として、その汎用性の証しとなっている感がある。

事実有限要素法なしでは、到底計算不可能なシェル構造物の出現は周知のとうりである。このような現在の計算環境により、従来より行われていた解析解の研究が、停滞して、あまり顧みられなくなってきているようにおもえる。他の理由としてはその微分方程式の複雑性や、その解法における変数変換などの煩雑さなどに起因しているようにおもわれる。事実シェル構造、例えば球形シェルの解析解は古くから知られているベッセル、ノイマン関数により表現されることが分かっているが円錐シェルの場合には、特殊な場合（対称荷重）をのぞき、まだ解析解は知られていない。これらの解析解の計算には面倒な級数計算がいつも、ともなうのである。これらの級数計算には項ごとの文字どうり機械的な検算がつきまとい、また微分方程式の変数変換に関してもまたしかりである。

従来より一般に使用されてきた電子計算機の数値計算ツールの面ばかりでなく最近注目を集めてきた人工知能の分野における記号処理、数式処理の使用により改めて古典的な解析解を求める事に応用を試みる。

* 国士舘大学電子計算機センター助教授 工学博士

Dr. of Engineering, Assistant professor at Computer Center Kokusikan University

2. 円錐シェルの微分方程式

ここでは、電子計算機の使用に関する点に問題を絞ることとして、円錐シェルの式の誘導についての詳細については、論じないことにする。回転対称荷重下における円錐シェルの解析解は、Flügge¹⁾によりもとめられているが、一般荷重下において、

$$\Delta \Delta w - \frac{a}{D} \frac{\tan^4 \theta}{\beta} \frac{1}{\rho} F'' = 0 \quad (1)$$

$$\Delta \Delta F + \frac{D}{a} (1 - \mu^2) \frac{1}{\rho} w'' = 0 \quad (2)$$

これらの連立微分方程式により表される。ここで

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3)$$

$$\beta = \frac{t^2}{12a^2} \quad (4)$$

$$D = \frac{Et}{1 - \mu^2} \quad (5)$$

w は、板厚方向の変位、 F は、応力関数、 μ は、ポアソン比、 E は、弾性定数。他の記号は、

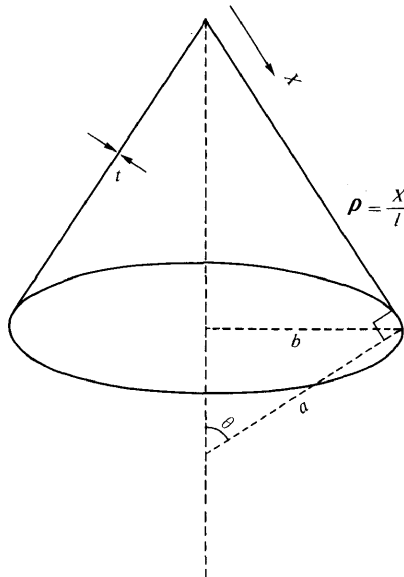


図1 円錐シェル

図を参照。この微分方程式(1),(2)を、複素変数

$$\Phi = w + i\kappa F \quad (6)$$

により表現すれば,

(ここで, $\kappa = a^2 \tan^2 \theta \sqrt{12(1-\mu^2)}/Et^2$ である)

$$\Delta \Delta \Phi + i \frac{\omega^2}{\rho} \Phi'' = 0 \quad (7)$$

ここで

$$\omega^2 = \frac{1-\mu^2}{\beta} \tan^2 \theta \quad (8)$$

3. 微分方程式の解

微分方程式の解は, $\Phi = C_1 g_1(\eta) + C_2 g_2(\eta)$ の形で表現される。ここで C_1, C_2 は, 定数, $g_1(\eta), g_2(\eta)$ は,

$$g_1(\eta) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\eta}{2} \right)^{2p+2\xi+4} \quad (9)$$

$$g_2(\eta) = 2 \ln \frac{\eta}{2} \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\eta}{2} \right)^{2p+2\xi+4} - \sum_{p=0}^{\infty} B_p \left(\frac{\eta}{2} \right)^{2p+2\xi} + \sum_{p=0}^{\infty} A_p \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\eta}{2} \right)^{2p+2\xi+4} \Psi \quad (10)$$

となり, $g_1(\eta)$ は, 第一種, $g_2(\eta)$ は, 第二種の一般化された超幾何関数である。ここで

$$A_p = \frac{(\xi+p)!(\xi+p+1)!}{(2\xi+p)!(2\xi+p+2)!(p+2)!} \quad (11)$$

$$B_p = \frac{(1-p)!(\xi+p-1)!(\xi+p-2)!}{p!(2\xi+p)!(2\xi+p-2)!} \quad (12)$$

また, Ψ は,

$$\begin{aligned} \Psi = & 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\xi+p+1} - \gamma \\ & + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\xi+p} - \gamma \\ & - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2\xi+p} + \gamma \\ & - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{2\xi+p+2} + \gamma \\ & - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{p+2} + \gamma \end{aligned}$$

$$-1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{p} + \gamma \quad (13)$$

ここで, γ は, オイラー定数で $\gamma=0.577215664\dots$

$$\eta = 2\omega \sqrt{ip} \quad (14)$$

$$\xi = m / \cos \theta (m=0, 1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

この解が上記の微分方程式を満たすか検算するため, 数式処理アプリケーション REDUCE 2²⁾を使用した。(付録参照 η は, (14)式で示されるように複素式であるので $i = e^{v\pi/2} = \cos v\pi/2 + i \sin v\pi/2$ の関係を利用して計算をしている)。

4. ま と め

数式処理を利用した構造物の計算は, 有限要素法の要素マトリックスの算出に使われているが, この様に, 解析解の計算にも簡単に起用することができ, 従来より行われてきた電子計算機の, 数値計算利用ばかりでなく, ここで示したように, 今までの利用形態とは, 違った電子計算機の応用が考えられ, これからの構造物の分野における発展が期待出来る。

なお数式処理言語 REDUCE 2 は, 国土館大学電子計算機センターで使用可能なものを, 使った。

(1986年9月30日 受理)

参 考 文 献

- 1) Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schale Dritte Auflage, Springer-Verlag, Berlin 1962.
- 2) Hearn, A. C.: REDUCE2 User's Manual University Utah.

付録

```

FACTOR COS((KSI*PI)/2), SIN((KSI*PI)/2);
OPERATOR A, PSI, H, K, L, F, B;
ALGEBRAIC PROCEDURE DELTA(PHI, ZZ, Y);          微分演算子式(3)の定義
BEGIN
RETURN
DF(PHI, ZZ, 2)+DF(PHI, ZZ, 1)/ZZ+DF(PHI, Y, 2)/(ZZ*COS(THETA))*2;
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE PG(EE, Y);                  変数分離の定義
BEGIN
RETURN EE*COS(M*Y);
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE D1(GG);                     式(7)の第1項
BEGIN
RETURN
DELTA(DELTA(PG(GG, Y), RHO, Y), RHO, Y);
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE D2(FFF);                    式(7)の第2項
BEGIN
RETURN
OMEGA**2/RHO*DF(PG(FFF, Y), RHO, 2);
END;
LET DF(F(RHO, Y), Y)=0,
    DF(F(RHO, Y), RHO, Y)=0,
    DF(F(RHO, Y), RHO, 2, Y)=0,
    DF(F(RHO, Y), RHO, 2, Y, 2)=0,
    DF(F(RHO, Y), RHO, Y, 2)=0;
ALGEBRAIC PROCEDURE GS(RHO, Q);                  式(9)の複素部
BEGIN
RETURN (A(Q)*(OMEGA**2*RHO)**(KSI+Q+2)*SIN((KSI+Q+2)*PI/2));
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE GC(RHO, Q);                  式(9)の実数部
BEGIN
RETURN (A(Q)*(OMEGA**2*RHO)**(KSI+Q+2)*COS((KSI+Q+2)*PI/2));
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE HC(RHO, Q);                  式(10)の第1項、実数部
BEGIN
RETURN
(LOG(OMEGA**2*RHO)*GC(RHO, Q));
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE KC(RHO, Q);
BEGIN

```

```

RETURN (
    PSI(Q)*GC(RHO, Q) );      式(10)の第3項、実数部
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE HS(RHO, Q);
BEGIN
RETURN
    (LOG(OMEGA**2*RHO)*GS(RHO, Q));  式(10)の第1項、虚数部
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE KS(RHO, Q);
BEGIN
RETURN (
    PSI(Q)*GS(RHO, Q) );      式(10)の第3項、虚数部
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE A(Q);
BEGIN
IF Q=0 THEN MM:=1              式(11)の表現
ELSE MM:=
    FOR J:=1:Q PRODUCT (KSI+J)/(2*KSI+J)*(KSI+J+1)/(2*KSI+J+2)*(-1)/(J*(J+2));
RETURN MM;
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE PSI(Q);
BEGIN                          式(13)の表現
IF Q=0 THEN MM:=-2
ELSE MM:=-2+ (FOR J:=1:Q SUM 1/(KSI+J+1)+1/(KSI+J)-1/(2*KSI+J)-1/(2*KSI+J+2)
    -1/(J+2)-1/J);
RETURN MM;
END;
LET COS((KSI+2)*PI/2)=-COS(KSI*PI/2),      あまりスマートな表現では
    COS((KSI+4)*PI/2)= COS(KSI*PI/2),      ないが三角関数の公式定義
    COS((KSI+6)*PI/2)=-COS(KSI*PI/2),
    COS((KSI+8)*PI/2)= COS(KSI*PI/2),
    COS((KSI+1)*PI/2)=-SIN(KSI*PI/2),
    COS((KSI+3)*PI/2)= SIN(KSI*PI/2),
    COS((KSI+5)*PI/2)=-SIN(KSI*PI/2),
    COS((KSI+7)*PI/2)= SIN(KSI*PI/2),
    COS((KSI+9)*PI/2)=-SIN(KSI*PI/2);
LET SIN((KSI+2)*PI/2)=-SIN(KSI*PI/2),
    SIN((KSI+4)*PI/2)= SIN(KSI*PI/2),
    SIN((KSI+6)*PI/2)=-SIN(KSI*PI/2),
    SIN((KSI+8)*PI/2)= SIN(KSI*PI/2),
    SIN((KSI+1)*PI/2)= COS(KSI*PI/2),
    SIN((KSI+3)*PI/2)=-COS(KSI*PI/2),

```

```

SIN((KSI+5)*PI/2) = COS(KSI*PI/2),
SIN((KSI+7)*PI/2) = -COS(KSI*PI/2),
SIN((KSI+9)*PI/2) = COS(KSI*PI/2);
FOR Q:=0:1 DO
BEGIN
  DD:=D1(HC(RHO, Q+1))-D2(HS(RHO, Q));
  EE:=D1(KC(RHO, Q+1))-D2(KS(RHO, Q));
  WRITE "DC(", Q+1, ") = ", DD;
  WRITE "EC(", Q+1, ") = ", EE;
  WRITE " (GL. MIT COS-GLIED) DC(", Q+1, ")+EC(", Q+1, ")=", DD+EE;
  DD:=D1(HS(RHO, Q+1))+D2(HC(RHO, Q));
  EE:=D1(KS(RHO, Q+1))+D2(KC(RHO, Q));
  WRITE "DS(", Q+1, ") = ", DD;
  WRITE "ES(", Q+1, ") = ", EE;
  WRITE " (GL. MIT SIN-GLIED) DS(", Q+1, ")+ES(", Q+1, ")=", DD+EE;
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE LC(RHO, Q); 式(10)の第2項、実数部
BEGIN
RETURN (
  B(Q)*(OMEGA**2*RHO)**(KSI+Q)*COS((KSI+Q)*PI/2) );
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE LS(RHO, Q); 式(11)の第2項、虚数部
BEGIN
RETURN (
  B(Q)*(OMEGA**2*RHO)**(KSI+Q)*SIN((KSI+Q)*PI/2) );
END;
ALGEBRAIC PROCEDURE B(Q);
BEGIN
 式(12)の表現
COMMENT C IS (KSI+1)!*(KSI-2)!/(2*KSI)!/(2*KSI-2)!;
COMMENT HIER B(0) WIRD IN C EINGESETZT;
C:=8*(4*KSI**2-1)/(KSI*(KSI-1));
IF Q=0 THEN RETURN C
ELSE
  RETURN (C*(KSI+Q-1)/(2*KSI+Q)*(KSI+Q-2)/(2*KSI+Q-2) );
END;
WRITE "BEI Q=0, DIE GLEICHUNG 5 GLIEDER MIT LOG "; ここから検算を始める。
DC:=D1(HC(RHO, 0)); 複素解析に伴い、実数部と
DS:=D1(HS(RHO, 0)); 虚数部および微分方程式の
WRITE "BEI Q=1 DIE GL. 2 GLIEDER MIT BIS P=1"; 形から各項が、関係しあっ
EC:=D2(LC(RHO, 1)); ている。このため、微分方
ES:=D2(LS(RHO, 1)); 程式の項と、解の級数の各
WRITE "DC+ES"; 項を各々、検算している。

```

```

WRITE DC+ES;
WRITE "DS-EC";
WRITE DS-EC;
  WRITE "BEI Q=1, DIE GLEICHUNG 2 GLIEDER MIT BIS P=1 ";
  DC:=D1(LC(RHO, 1));
  DS:=D1(LS(RHO, 1));
  WRITE "BEI Q=0, DIE GLEICHUNG 2 GLIEDER MIT BIS P=1 ";
  ES:=D2(LS(RHO, 0));
  EC:=D2(LC(RHO, 0));
WRITE "DC-ES";
WRITE DC-ES;
WRITE "DS+EC";
WRITE DS+EC;
  WRITE "BEI Q=0, DIE GLEICHUNG 5 GLIEDER MIT PSI ";
  EC:=D1(KC(RHO, 0));
  ES:=D1(KS(RHO, 0));
  WRITE "BEI Q=0, DIE GLEICHUNG 5 GLIEDER MIT BIS P=1 ";
  EC:=D1(LC(RHO, 0));
  ES:=D1(LS(RHO, 0));
END;
END;

```

上記のプログラムを使って計算をすると、

-REDUCE REDUCEを呼び出す。

nil

IN ALGEM; 上記のプログラムALGEMを処理させるためにfile ALGEMを呼ぶ。

delta 以下、定義した関数が生成されて行く。

pg

d1

d2

gs

gc

hc

kc

hs

ks

a

以下、各項を代入した結果を計算する。

psi

$$dc(1) = (\rho^{ksi} \omega^{(2*ksi)} \sin((\pi*ksi)/2) \cos(y*m) \omega^6 * (-16*ksi^4 - 68*ksi^3 - 104*ksi^2 - 70*ksi - 21)) / (3*\rho*(4*ksi^2 + 8*ksi + 3))$$

$$ec(1) = (\rho^{ksi} \omega^{(2*ksi)} \sin((\pi*ksi)/2) \cos(y*m) \omega^6 * (64*ksi^8 + 592*ksi^7$$

ノート：数式処理を利用した円錐シェルの解析的解法

$$\begin{aligned}
 & + 2336*ksi^6 + 5140*ksi^5 + 6920*ksi^4 + 5878*ksi^3 + 3109*ksi^2 + 945* \\
 & ksi + 126)) / (3*rho*(16*ksi^6 + 112*ksi^5 + 312*ksi^4 + 440*ksi^3 + 329* \\
 & ksi^2 + 123*ksi + 18)) \\
 (gl. mit cos-glied) dc(1)+ec(1)=0 \\
 ds(1) = (rho *ksi^{(2*ksi)} *cos((pi*ksi)/2)*cos(y*m)*omega^6*(16*ksi^4 + 68*ksi^3 \\
 + 104*ksi^2 + 70*ksi + 21)) / (3*rho*(4*ksi^2 + 8*ksi + 3)) \\
 es(1) = (rho *ksi^{(2*ksi)} *cos((pi*ksi)/2)*cos(y*m)*omega^6*(- 64*ksi^8 - 592* \\
 ksi^7 - 2336*ksi^6 - 5140*ksi^5 - 6920*ksi^4 - 5878*ksi^3 - 3109*ksi^2 - \\
 945*ksi - 126)) / (3*rho*(16*ksi^6 + 112*ksi^5 + 312*ksi^4 + 440*ksi^3 + \\
 329*ksi^2 + 123*ksi + 18)) \\
 (gl. mit sin-glied) ds(1)+es(1)=0 \\
 dc(2) = (rho *ksi^{(2*ksi)} *cos((pi*ksi)/2)*cos(y*m)*omega^8*(3*ksi^5 + 23*ksi^4 + \\
 71*ksi^3 + 113*ksi^2 + 94*ksi + 32)) / (12*(4*ksi^3 + 12*ksi^2 + 11*ksi + 3 \\
)) \\
 ec(2) = (rho *ksi^{(2*ksi)} *cos((pi*ksi)/2)*cos(y*m)*omega^8*(- 12*ksi^12 - 224* \\
 ksi^11 - 1893*ksi^10 - 9590*ksi^9 - 32477*ksi^8 - 77526*ksi^7 - 133803* \\
 ksi^6 - 168154*ksi^5 - 152499*ksi^4 - 97090*ksi^3 - 41044*ksi^2 - 10296* \\
 ksi - 1152)) / (12*(16*ksi^10 + 224*ksi^9 + 1368*ksi^8 + 4800*ksi^7 + 10713 \\
 *ksi^6 + 15882*ksi^5 + 15824*ksi^4 + 10450*ksi^3 + 4371*ksi^2 + 1044*ksi \\
 + 108)) \\
 (gl. mit cos-glied) dc(2)+ec(2)=0 \\
 ds(2) = (rho *ksi^{(2*ksi)} *sin((pi*ksi)/2)*cos(y*m)*omega^8*(3*ksi^5 + 23*ksi^4 + \\
 71*ksi^3 + 113*ksi^2 + 94*ksi + 32)) / (12*(4*ksi^3 + 12*ksi^2 + 11*ksi + 3 \\
)) \\
 es(2) = (rho *ksi^{(2*ksi)} *sin((pi*ksi)/2)*cos(y*m)*omega^8*(- 12*ksi^12 - 224* \\
 ksi^11 - 1893*ksi^10 - 9590*ksi^9 - 32477*ksi^8 - 77526*ksi^7 - 133803* \\
 ksi^6 - 168154*ksi^5 - 152499*ksi^4 - 97090*ksi^3 - 41044*ksi^2 - 10296* \\
 ksi - 1152)) / (12*(16*ksi^10 + 224*ksi^9 + 1368*ksi^8 + 4800*ksi^7 + 10713 \\
 *ksi^6 + 15882*ksi^5 + 15824*ksi^4 + 10450*ksi^3 + 4371*ksi^2 + 1044*ksi \\
 + 108)) \\
 (gl. mit sin-glied) ds(2)+es(2)=0
 \end{aligned}$$

lc

ls

b

bei q=0, die gleichung 5 glieder mit log

$$dc := (- (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \cos((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^4 \cdot ksi \cdot (ksi + 1)) / \rho^2$$

$$ds := (- (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \sin((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^4 \cdot ksi \cdot (ksi + 1)) / \rho^2$$

bei q=1 die gl. 2 glieder mit bis p=1

$$ec := (- (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \sin((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^4 \cdot ksi \cdot (ksi + 1)) / \rho^2$$

$$es := (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \cos((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^4 \cdot ksi \cdot (ksi + 1)) / \rho^2$$

dc+es

0

ds-ec

0

bei q=1, die gleichung 2 glieder mit bis p=1

$$dc := (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \sin((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^2 \cdot (4 \cdot ksi^2 - 1)) / \rho^3$$

$$ds := (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \cos((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^2 \cdot (-4 \cdot ksi^2 + 1)) / \rho^3$$

bei q=0, die gleichung 2 glieder mit bis p=1

$$es := (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \sin((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^2 \cdot (4 \cdot ksi^2 - 1)) / \rho^3$$

$$ec := (8 \cdot \rho^{ksi} \cdot \omega^{(2 \cdot ksi)} \cdot \cos((\pi \cdot ksi)/2) \cdot \cos(y \cdot m) \cdot \omega^2 \cdot (4 \cdot ksi^2 - 1)) / \rho^3$$

dc-es

0

ds+ec

0

bei q=0, die gleichung 5 glieder mit psi

ec := 0

es := 0

bei q=0, die gleichung 5 glieder mit bis p=1

ec := 0

es := 0

END;

以上でALGEMの計算を終了する。